ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ

РЯДЫ

Консультационное пособие для школьников и студентов в решении задач с примерами решённых задач из задачника автора Кузнецова Л.А.

Вариант 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$$

Москва 2007

Задача 1

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}$$

Произведем эквивалентные преобразования ряда:

Так как n^2-11n+28 = (n-4)(n-7), то получаем, что исходный ряд мы можем переписать в следующем виде:

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}=\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{(n-4)(n-7)}=\left\{\frac{1}{n-4}\cdot\frac{1}{n-7}=\right.$$

$$\left.=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-4}\right)\right\}=\sum_{n=8}^{\infty}36\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-4}\right)=$$

$$=12\sum_{n=8}^{\infty}\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-4}\right)=12\left(\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-7}-\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-4}\right)$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-7}$.

Произведем замену {n-7 = k}, тогда суммирование будет производиться от k = n-7 = {n=8} = 8 –7 =1, а $\frac{1}{n-7}=\frac{1}{k}$.

Подставим полученные значения в ряд $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-7}$:

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-7}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Произведем аналогичные преобразования и с рядом

$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-4}$. Тогда для него замена (n-4=k):

начальное $k = n-4 = (n = 8) = 8-4=4$, а $\frac{1}{n-4}=\frac{1}{k}$.

Подставим данные в $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-4}$:

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{1}{n-4}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Итак, мы получили, что исходный ряд равен разности двух рядов:

$$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}=12\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=$$

$$=12\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=12\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=22.$$

Ответ: $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}=22.$

Задача 2

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{7/3}}$$

Обозначим $a_n = \frac{\ln n}{n^{7/3}}$

Заметим, что $\ln(n)$ растет медленнее, чем любая степенная функция, то есть при достаточно больших n верно следующее утверждение:

$\ln(n) < n^{\alpha}$, $\forall\alpha > 0$.

Тогда для всех $n \geq N_0$ (где N_0 такое, что $\ln(N_0)<N_0^{1/3}$):

$$a_n \leq \frac{n^{1/3}}{n^{7/3}} = \frac{1}{n^2}$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n = \frac{1}{{}^{2}n}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. a>1 и расходится в противном случае, при $a\leq 1$) ,ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: 2>1.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{7/3}}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{7/3}}$ сходится.

Задача 3

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}$$

Обозначим $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}$

При $n\to\infty$ $\sin(\frac{1}{n+1})\approx\frac{1}{n+1}$. Поэтому получаем, что сходимость исходного ряда эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+4}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Тогда из его сходимости будет следовать сходимость исходного ряда, так как тогда он будет ограничен сходящимся рядом сверху и нулем снизу (все члены ряда неотрицательны).

Обозначим $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$. По признаку сравнения (говорящему, что ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ сходится только при условии, что a строго больше 1, т.е. a>1 и расходится в противном случае, при $a\le 1$) ,ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, так как выполняется условие сходимости: 1.5>1.

Поэтому и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\frac{1}{n+1}$ сходится.

Задача 4

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!} = \dfrac{10^n\cdot 2}{(n+1)\cdots(2n)}$

$$a_n = 2\frac{10}{(n+1)}\frac{10}{(n+2)}\frac{10}{(n+2)}\cdots\frac{10}{2n} =$$

$$= 200\frac{10}{(n+1)}\frac{10}{(n+2)}\frac{10}{(n+2)}\cdots\frac{10}{(2n-2)}\left(\frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{2n}\right)$$

Выделим из данного разложения элемент $\dfrac{1}{(2n-1)}\dfrac{1}{2n}$, все остальные дроби ограничим 1. Такое ограничение верно только начиная с номера n=10, но так как сходимость ряда по признаку Коши эквивалентна сходимости его остатка, начиная с некоторого фиксированного номера N, то мы перейдем к рассмотрению ряда $\sum_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)}\dfrac{1}{2n}$.

Точнее покажем, что он сходится:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{2n} < \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{4}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

По признаку сравнения ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, так как его показатель степени равен 2>1.

Тогда мы получшем, что и исходный $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!}$ также сходится, так как мы его ограничили сверху сходящимся рядом.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!}$ сходится.

Задача 5

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Воспользуемся признаком Коши:

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - расходится.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{4}<1$$

Таким образом, по признаку Коши исходный ряд является сходящимся.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ сходится.

Задача 6

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}=\sum_{n=3}^{\infty}a_n$$

Воспользуемся предельным признаком сходимости.

Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ удовлетворяют условию:

$\lim\frac{a_n}{b_n}=L$, где L – конечное число, не равное 0, то ряды

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(4n-7)\ln^2(4n-7)}=\sum_{n=3}^{\infty}b_n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{4}{3}$ — это конечное число, не равное 0

Значит, ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Для исследования сходимости второго ряда воспользуемся интегральным признаком сходимости рядов.

Если некоторая функция f(x) удовлетворяет условию $f(n)=b_n$, то если $\int_3^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ сходится, а если $\int_3^{\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ расходится.

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x)=\frac{1}{(4x-7)\ln^2(4x-7)}$$

Если $\int_3^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ сходится, если интеграл расходится, то и ряд $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ расходится.

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{(4x-7)\ln^2(4x-7)}=\frac{1}{4}\int_3^{\infty}\frac{d\ln(4x-7)}{\ln^2(4x-7)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\ln(4x-7)}\bigg|_3^{\infty}=\frac{1}{4\ln 5}$$

Интеграл сходится, значит и ряд $\sum b_n$ сходится. Из сходимости этого ряда следует сходимость исходного.

Ответ: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$ сходится.

Задача 7

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\ln\ln n}$$

Воспользуемся признаком Лейбница:

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ удовлетворяет условиям:

1) a_n – монотонно убывающая, начиная с некоторого $n = N$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

Рассмотрим $a_n = \dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$;

Так как функции $\ln x, \ln\ln x, x$ возрастают, то возрастает функция $x\ln x\ln\ln x$, а следовательно последовательность $a_n = \dfrac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ убывает.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n} = 0$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\ln\ln n}$ сходится по признаку Лейбница.

Ответ: ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\ln\ln n}$ сходится

Задача 9

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{4}{n})^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$$

Обозначим $a_n=(1+\frac{4}{n})^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$, а искомую область сходимости ряда – X.

При $n\to\infty: (1+\frac{4}{n})^{n/4}=\{k=\frac{n}{4}\}=(1+\frac{1}{k})^k\to e$

Необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю a_n при стремлении n к бесконечности:

$$a_n=(1+\frac{4}{n})^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}=((1+\frac{4}{n})^{n/4})^4 e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}\to e^4 e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$$

$$e^4 e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}=e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}+4}\to 0\Rightarrow (n(x^2-4)+x\sqrt{n}+4)\to-\infty;$$

$$(\sqrt{n}x+1)^2-4n+3<0\Leftrightarrow -\sqrt{4n-3}<(\sqrt{n}x+1)<\sqrt{4n-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{4n-3}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<x<\sqrt{\frac{4n-3}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Перейдем к пределам для полученного неравенства:

$$\lim_{n\to\infty}\{-\sqrt{\frac{4n-3}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\}=-2; \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{\frac{4n-3}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\}=2;$$

Получаем, что $-2<x<2$. При данных x исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{4}{n})^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$ ограничен сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}+4}$. При $\{|x|>2\}$ исходный ряд заведомо больше ряда $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$, но тогда $n(x^2-4)+x\sqrt{n}>0, \forall n\in N$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$ расходится. Как следствие, тогда расходится исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{4}{n})^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$. Следовательно, $X=\{|x|<2\}$.

Ответ: область сходимости $X=\{|x|<2\}$.

Задача 10

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+3)2^{n-1}} (x+7)^n$$

Приведем этот ряд к степенному:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+3)2^{n-1}} (x+7)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x+7)^k,$$

где $a_k = \dfrac{(-1)^n (k+1)}{(k+3)2^{k-1}}$.

Используем формулу для нахождения радиуса сходимости, основанную на применении признака Коши:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(k+3)2^{k-1}}{(-1)^n (k+1)}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{(k+3)2^k}{2(k+1)}} = 2$$

Таким образом, интервал сходимости ряда будет выглядеть следующим образом:

$$-2 < x+7 < 2 \Rightarrow x \in (-9;-5)$$

Ответ: область сходимости $X = \{x \in (-9;-5)\}$.

Задача 11

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$$

Приведем этот ряд к степенному, т.е. к виду: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где a_k не зависит от x и является постоянной величиной.

Положим $a_n = \frac{n-1}{3^n}$, тогда исходный ряд можно переписать в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}(x^2-4x+6)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2-4x+6)^n$$

Теперь нам требуется найти $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = L$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{n-1}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n-1}}{3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})}{3}$$

Воспользуемся следующим равенством:

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{ak+b} = 1$, где a и b постоянные числа, a>0.

Тогда:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3}$$

Таким образом, по теореме Коши-Адамара, область сходимости $X = \{|x^2 - 4x + 6| < \frac{1}{L} = 3\}$.

Решим неравенство, чтобы в явном виде записать область сходимости:

$$|x^2 - 4x + 6| < 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 6 > -3, \\ x^2 - 4x + 6 < 3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 9 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 9 > 0, \\ (x-1)(x-3) < 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \in (1,3); \end{cases} \Rightarrow x \in (1,3).$$

Таким образом, область $X = (1,3)$

Ответ: область сходимости $X = (1,3)$

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$$

Произведем тождественные преобразования ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n =$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n =$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n -$$

$$- \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1} x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right) - \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n =$$

$$= \frac{1}{x} \left(x + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right)$$

Обозначим $A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

Рассмотрим производную $A'(x)$:

$$A'(x) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$$

(Сумма убывающей геометрической прогрессии)

Ряд будет сходиться при $|x|<1$.

$$A(x)=\int\frac{x}{1-x}dx=\int\frac{x+1-1}{1-x}dx=$$

$$=\int -1dx+\int\frac{1}{1-x}dx=-x-\ln(1-x)+C$$

Чтобы найти константу C, найдем значение ряда в некоторой фиксированной точке x, возьмем $x=0$, тогда:

$$A(x)=0=C$$

Таким образом, сумма ряда $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$, равная $A(x)$, есть $-x-\ln(1-x)$ при $|x|<1$, и не существует при всех остальных значениях x.

Таким образом:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n=\frac{1}{x}(x+(1-\frac{1}{x})(-x-\ln(1-x)))$$

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}x^n=\frac{1}{x}(x+(1-\frac{1}{x})(-x-\ln(1-x))),\ |x|<1.$$

Задача 13

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(x^3)^n$$

Разложим этот ряд на сумму двух более простых рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(x^3)^n+4\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n.$$

Произведем замену переменных $y=x^3$:

Найдем $A(y)=\sum_{n=0}^{\infty}ny^n$. Заметим, что $A(y)$ есть производная от функции $B(y)=\sum_{n=1}^{\infty}y^n$, умноженная на y:

$$B'(y)=\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$$

$$A(y)=y\cdot B'(y).$$

Сумма ряда $B(y)$ есть сумма убывающей геометрической прогрессии и поэтому равна $B(y)=\dfrac{y}{1-y}$, при условии, что $|y|<1$. Тогда производная от $B(x)$ такова:

$$B'(y)=\frac{y'(1-y)-y(1-y)'}{(1-y)^2}=\frac{1-y+y}{(1-y)^2}=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

Тогда $A(y)=y\cdot B'(y)=y\cdot\dfrac{1}{(1-y)^2}=\dfrac{y}{(1-y)^2}$ при $|y|<1$ и не существует при $|y|\geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(x^3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}ny^n+4\sum_{n=0}^{\infty}y^n=\frac{y}{(1-y)^2}+4\frac{1}{1-y}=$$

$$=\frac{y+4(1-y)}{(1-y)^2}=\frac{4-3y}{(1-y)^2}=\frac{4-3x^3}{(1-x^3)^2}$$

Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{3n}=\begin{cases}\dfrac{4-3x^3}{(1-x^3)^2}, |x|<1\\ \infty, |x|\geq 1\end{cases}$

Задача 14

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$$

Чтобы решить эту задачу, следует воспользоваться табличными разложениями в степенные ряды. Приведем функцию к виду, удобному для разложения:

$$2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x=2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+\cos x)-x=x\cdot(1+\cos x)-x=$$

$$=x\cdot\cos x$$

Воспользуемся табличным разложением для cos x:

$$x\cdot\cos x=x\cdot\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]$$

Раскроем скобки:

$$x\cdot\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]=$$

$$=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots$$

Запишем получившееся выражение в виде ряда:

$$x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

Ответ: $2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$

Задача 15

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

$$I = \int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по x:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \int_0^{0,5} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{4n} \prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} + m\right)\right] dx$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то возьмем приведенный выше интеграл почленно. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$\int_0^{0,5} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{4n} \prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} + m\right)\right] dx = \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} + m\right)\right]_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n!} \frac{0,5^{4n+1}}{4n+1} \prod_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4} + m\right)}_{a_n}$$

У нас получился знакопеременный ряд. Чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, достаточно найти сумму этого ряда до члена, по модулю меньшего, чем 0,001. Таким образом, нам нужно найти N, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$\left|(-1)^N \frac{1}{N!} \frac{0,5^{4N+1}}{4N+1} \prod_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4} + m\right)\right| < 0,001$$

Искать N будем следующим образом:

$$|a_1| \approx 0{,}0015 > 0{,}001$$

$$|a_2| \approx 0{,}000034 < 0{,}001 \Rightarrow N = 2$$

Тогда:

$$I \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{2}\left[(-1)^n \frac{1}{n!}\frac{0{,}5^{4n+1}}{4n+1}\prod_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4} + m\right)\right] \approx 0{,}498$$

Ответ: $I = 0{,}498 \pm 0{,}001$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сумма двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

При этом если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

Произведение ряда на число

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$$

При этом если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т.е. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Признак сравнения I

Даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами, причем для любого n верно неравенство $a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак сравнения II

Даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами. Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения общих членов данных рядов при $n \to \infty: \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Гармонический ряд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим. Он удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но, тем не менее, расходится.

Обобщенный гармонический ряд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где p – любое действительное число, называется обобщенным гармоническим и сходится при $p>1$. При $p\leq 1$ обобщенный гармонический ряд расходится.

Признак Даламбера

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны. Если существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ данный ряд сходится, при $p>1$ – расходится, а при $p=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Радикальный признак Коши

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны. Если существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$, то при $p<1$ данный ряд сходится, при $p>1$ – расходится, а при $p=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Следует заметить, что если один из признаков Даламбера или Коши привел к результату $p=1$, то применение другого признака также бесполезно.

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots,$$

в котором все $a_n>0$, монотонно убывают по абсолютной величине и если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сам сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится.

Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда

Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ всегда является промежуток между $-R$ и R, симметричный относительно нуля, в граничных точках которого поведение ряда неопределенно.

Число $R>0$ (случай $R = \infty$ не исключается) называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, если для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < R$ ряд сходится, а для всех значений x, для которых

$|x-a|>R$ – расходится. Интервал $(a-R, a+R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ сходится лишь в точке $x=a$, то, по определению, полагают $R=0$.

Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Из признаков Даламбера и Коши возможен вывод следующих формул для вычисления радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$$

Этими формулами, впрочем, нельзя пользоваться в тех случаях, когда бесконечное множество коэффициентов C_n ряда обращается в нуль. В этих случаях следует использовать признаки Даламбер и Коши в «чистом» виде или пользоваться следующей общей формулой:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

Теорема Коши-Адамара

1. Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ не ограничена, то степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится лишь при $x=0$;

2. Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}(n=1,2,...)$ ограничена и имеет конечный предел $L \neq 0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|<\frac{1}{L}$, и расходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>\frac{1}{L}$.

3. Если последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}(n=1,2,...)$ ограничена и имеет конечный предел $L=0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ абсолютно сходится для всех значений x.

Разложение функции в ряд Тейлора

Если функция f(x) имеет в точке x=a и некоторой ее окрестности производные до n-го порядка включительно, то в каждой точке x этой окрестности она представима следующей формулой Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+T_n(x)$$

$T_n(x)$ здесь – это остаточный член ряда Тейлора.

Пусть теперь функция f(x) в некоторой окрестности точки x=a имеете производные всех порядков. Если для каждой точки x этой окрестности $\lim_{n\to\infty} T_n(x)=0$, то переход к пределу при $n\to\infty$ дает представление функции f(x) в виде ряда:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Табличные разложения функций в ряд Тейлора

Условимся табличными разложениями считать разложения в степенные ряды следующих функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arctg} x$ и $\ln(1+x)$. При использовании табличных разложений отпадает необходимость исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора, так как их области сходимости известны.

Табличные разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad x \in (-1,1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (m \neq 0, x \in (-1,1))$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad x \in [-1,1]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x \in (-1,1]$$

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}$$