

Задача Кузнецов Пределы 1-22

Условие задачи

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4n - 3}{2n + 1}, \quad a = 2$$

Решение

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{4n - 3}{2n + 1} - 2 \right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left| \frac{4n - 3 - 2(2n + 1)}{2n + 1} \right| < \varepsilon;$$

$$\left| \frac{4n - 3 - 4n - 2}{2n + 1} \right| < \varepsilon; \Rightarrow$$

$$\left| \frac{-5}{2n + 1} \right| < \varepsilon; \Rightarrow$$

$$\left| \frac{5}{2n + 1} \right| < \varepsilon; \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2n + 1} < \varepsilon; \Rightarrow$$

$$2n + 1 > \frac{5}{\varepsilon}; \Rightarrow$$

$$n > \frac{1}{2} \left(\frac{5}{\varepsilon} - 1 \right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен 2.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{5}{\varepsilon} - 1 \right) \right] + 1 = \left[\frac{5}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{5 + \varepsilon}{2\varepsilon} \right]$$

Задача Кузнецов Пределы 2-22

Условие задачи

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}{((n+1)^2 - n^2) \cdot ((n+1)^2 + n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3n + 1}{(n^2 + 2n + 1 - n^2)(n^2 + 2n + 1 + n^2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}(3n^2 - 3n + 1)}{\frac{1}{n^3}(2n+1)(2n^2 + 2n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{0 - 0 + 0}{(2 + 0) \cdot (2 + 0 + 0)} = 0 \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 3-22

Условие задачи

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{7}{5}} \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5} \right)}{n^{-\frac{7}{5}} \left(\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 \cdot n^{-\frac{21}{5}}} - \sqrt{n^2 \cdot n^{-\frac{14}{5}} + 5n^{-\frac{14}{5}}}}{\sqrt[5]{n^7 \cdot n^{-7}} - \sqrt{n \cdot n^{-\frac{14}{5}} + n^{-\frac{14}{5}}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^{-\frac{11}{5}}} - \sqrt{n^{-\frac{4}{5}} + 5n^{-\frac{14}{5}}}}{\sqrt[5]{1} - \sqrt{n^{-\frac{9}{5}} + n^{-\frac{14}{5}}}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{0} - \sqrt{0 + 5 \cdot 0}}{1 - \sqrt{0 + 0}} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 4-22

Условие задачи

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}) (\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)})}{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^5 + 1)(n^2 - 1) - n^2(n(n^4 + 1))}{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 - n^5 + n^2 - 1 - n^7 - n^3}{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^5 - n^3 + n^2 - 1}{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{7}{2}}(-n^5 - n^3 + n^2 - 1)}{n^{-\frac{7}{2}}(\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + n\sqrt{n(n^4 + 1)})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^{\frac{3}{2}} - n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{3}{2}} - n^{-\frac{7}{2}}}{\sqrt{n^{-7}(n^5 + 1)(n^2 - 1)} + \sqrt{n^{-5}n(n^4 + 1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n^3} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n^7}}}{\sqrt{(1 + \frac{1}{n^5})(1 - \frac{1}{n^2})} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} = \\ &= \left\{ \frac{-\infty - 0 + 0 - 0}{\sqrt{(1 + 0)(1 - 0)} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{-\infty}{2} \right\} = -\infty \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 5-22

Условие задачи

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3)}$$

Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{\left(\frac{(2 + (5n - 3))n}{2}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + \sqrt{n} - 1)}{(5n - 1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} 2(n^2 + \sqrt{n} - 1)}{\frac{1}{n^2} (5n - 1)n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{n^2}\right)}{5 - \frac{1}{n}} = \frac{2(1 + 0 - 0)}{5 - 0} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 6-22

Условие задачи

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}$$

Решение

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+2}{n+1} \right)^{-n^2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{-n^2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2}{n+1}\right) (-n^2)} = \\
&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1}\right) (-n^2)} = \\
&= \{ \text{Используем второй замечательный предел} \} = \\
&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} (-2n^2)}{\frac{1}{n} (n+1)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{1 + \frac{1}{n}}} = \\
&= \left\{ e^{\frac{-\infty}{1+0}} = e^{-\infty} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\infty} \right\} = 0
\end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 7-22

Условие задачи

Доказать, что (найти $\delta(\varepsilon)$):

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10$$

Решение

Согласно определению предела функции по Коши:

если дана функция $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in M'$ — предельная точка множества M . Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f при x , стремящемся к a ($x \rightarrow a$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in M : (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Следовательно, необходимо доказать, что при произвольном $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, для которого будет выполняться неравенство:

$$\left| \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} - (-10) \right| < \varepsilon, \text{ если выполнено } |x - (-4)| < \delta(\varepsilon).$$

При $x \neq -4$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} - (-10) \right| &= \left| \frac{(2x - 2)(x + 4)}{x + 4} + 10 \right| = \\ &= |2x - 2 + 10| = |2x + 8| = 2|x + 4| < \varepsilon \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} |x + 4| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |x - (-4)| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, при произвольном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left| \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} - (-10) \right| < \varepsilon \text{ будет выполняться, если будет выполняться неравенство } |x - (-4)| < \delta(\varepsilon), \text{ где } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $x \rightarrow -4$ предел функции существует и равен -10, а $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Задача Кузнецов Пределы 8-22

Условие задачи

Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 (найти $\delta(\varepsilon)$):

$$f(x) = -3x^2 - 5, \quad x_0 = 2$$

Решение

По определению функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f(2)| = \\ &= |(-3x^2 - 5) - (-3 \cdot 2^2 - 5)| = |-3x^2 - 5 + 3 \cdot 4 + 5| = \\ &= |-3x^2 + 3 \cdot 4| = 3|x^2 - 4| < \varepsilon \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |(x - 2)(x + 2)| &< \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Т.е. неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$. Значит, функция непрерывна в точке $x_0 = 2$ и $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$.

Задача Кузнецов Пределы 9-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 10-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{\sqrt[7]{x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{\sqrt[7]{x}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^{\frac{1}{7}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{\frac{6}{7}}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2 \cdot 0^{\frac{6}{7}}}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 11-22

У этой задачи может быть и другое условие (возможно из-за разных изданий или ошибки).
Подробнее см. ниже

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \cdot \ln 2$$

Решение

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\begin{aligned} \arcsin 2x &\sim 2x, \text{ при } x \rightarrow 0 (2x \rightarrow 0) \\ e^{-3x \ln 2} - 1 &\sim -3x \ln 2, \text{ при } x \rightarrow 0 (-3x \ln 2 \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \cdot \ln 2 &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(e^{\ln 2})^{-3x} - 1} \cdot \ln 2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{-3x \ln 2} - 1} \cdot \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-3x \ln 2} \cdot \ln 2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 11-22(2)

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3(x + \pi)}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3(x + \pi)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin (3x + 3\pi)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin (3x + \pi)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{-\sin 3x} = \end{aligned}$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\begin{aligned} \arcsin 2x &\sim 2x, \text{ при } x \rightarrow 0 (2x \rightarrow 0) \\ \sin 3x &\sim 3x, \text{ при } x \rightarrow 0 (3x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Получаем:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Задача Кузнецов Пределы 12-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

Решение

Замена:

$$\begin{aligned} x &= y^{12} \Rightarrow y = \sqrt[12]{x} \\ x \rightarrow 1 &\Rightarrow y \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{y^{12}} - 1}{\sqrt[4]{y^{12}} - 1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)(y^2+1)}{(y^2+y+1)} = \frac{(1+1)(1^2+1)}{(1^2+1+1)} = \\
&= \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 13-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$$

Решение

Замена:

$$\begin{aligned}
x &= y + \pi \Rightarrow y = x - \pi \\
x &\rightarrow \pi \Rightarrow y \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(2 + \cos(y + \pi))}{(3^{\sin(y + \pi)} - 1)^2} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos y)}{(3^{-\sin y} - 1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (1 - \cos y))}{((e^{\ln 3})^{-\sin y} - 1)^2} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (1 - \cos y))}{(e^{-\sin y \cdot \ln 3} - 1)^2} =
\end{aligned}$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\begin{aligned}
\ln(1 + (1 - \cos y)) &\sim 1 - \cos y, \text{ при } y \rightarrow 0 (1 - \cos y \rightarrow 0) \\
e^{-\sin y \cdot \ln 3} - 1 &\sim -\sin y \cdot \ln 3, \text{ при } y \rightarrow 0 (-\sin y \cdot \ln 3 \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

Получаем:

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{(-\sin y \cdot \ln 3)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{\sin^2 y \cdot \ln^2 3} =$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\sin y \sim y, \text{ при } y \rightarrow 0$$

$$1 - \cos y \sim \frac{y^2}{2}, \text{ при } y \rightarrow 0$$

Получаем:

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^2}{2}}{y^2 \cdot \ln^2 3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2 \ln^2 3} = \frac{1}{2 \ln^2 3}$$

Задача Кузнецов Пределы 14-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1) - (e^{2x} - 1)}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} ((e^{3x} - 1) - (e^{2x} - 1))}{\frac{1}{x} (\sin 3x - \operatorname{tg} 2x)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} ((e^{3x} - 1) - (e^{2x} - 1))}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sin 3x - \operatorname{tg} 2x)} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) / \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \right) = \end{aligned}$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$e^{3x} - 1 \sim 3x, \text{ при } x \rightarrow 0 (3x \rightarrow 0)$$

$$e^{2x} - 1 \sim 2x, \text{ при } x \rightarrow 0 (2x \rightarrow 0)$$

$$\sin 3x \sim 3x, \text{ при } x \rightarrow 0 (3x \rightarrow 0)$$

$$\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \text{ при } x \rightarrow 0 (2x \rightarrow 0)$$

Получаем:

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 3 - \lim_{x \rightarrow 0} 2}{\lim_{x \rightarrow 0} 3 - \lim_{x \rightarrow 0} 2} = \frac{3 - 2}{3 - 2} = 1$$

Задача Кузнецов Пределы 15-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \end{aligned}$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2}, \text{ при } x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos \sqrt{x} &\sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2}, \text{ при } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}} = \\ &= \frac{0}{1 + \sqrt{\cos 0}} = \frac{0}{1 + \sqrt{1}} = 0 \end{aligned}$$

Задача Кузнецов Пределы 16-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x} \right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x} \right)^{\operatorname{cosec}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\ln \left(3 - \frac{2}{\cos x} \right)} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln\left(3 - \frac{2}{\cos x}\right)}{\sin^2 x}} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \left(2 - \frac{2}{\cos x}\right)\right)}{\sin^2 x} \right\} =$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\ln\left(1 + \left(2 - \frac{2}{\cos x}\right)\right) \sim 2 - \frac{2}{\cos x}, \text{ при } x \rightarrow 0 \left(2 - \frac{2}{\cos x} \rightarrow 0\right)$$

$$\sin x \sim x, \text{ при } x \rightarrow 0$$

Получаем:

$$= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2}{\cos x}}{x^2} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right)}{x^2} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(1 - \cos x)}{x^2 \cdot \cos x} \right\} =$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \text{ при } x \rightarrow 0$$

Получаем:

$$= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \frac{x^2}{2}}{x^2 \cdot \cos x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos x} \right\} =$$

$$= \exp \left\{ \frac{-1}{\cos 0} \right\} = \exp \{-1\} = e^{-1}$$

Задача Кузнецов Пределы 17-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \left(\frac{x}{\pi} \right) \right)^{1+x}$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \left(\frac{x}{\pi} \right) \right)^{1+x} = \left(\cos \left(\frac{0}{\pi} \right) \right)^{1+0} = 1^1 = 1$$

Задача Кузнецов Пределы 18-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$$

Решение

Замена:

$$x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}} = \\ & = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin((y+1)-1)}{(y+1)-1} \right)^{\frac{\sin((y+1)-1)}{(y+1)-1-\sin((y+1)-1)}} = \\ & = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^{\frac{\sin y}{y-\sin y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(e^{\ln\left(\frac{\sin y}{y}\right)} \right)^{\frac{\sin y}{y-\sin y}} = \\ & = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\sin y}{y-\sin y} \cdot \ln\left(\frac{\sin y}{y}\right)} = \exp \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y-\sin y} \cdot \ln\left(\frac{\sin y}{y}\right) \right\} = \\ & = \exp \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y-\sin y} \cdot \ln\left(1 - \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\right) \right\} = \end{aligned}$$

Воспользуемся заменой эквивалентных бесконечно малых:

$$\ln\left(1 - \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\right) \sim -\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right), \text{ при } y \rightarrow 0 \left(-\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) \rightarrow 0\right)$$
$$\sin y \sim y, \text{ при } y \rightarrow 0$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & = \exp \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y-\sin y} \cdot \left(-\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right)\right) \right\} = \\ & = \exp \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y-\sin y} \cdot \left(-\frac{y-\sin y}{y}\right) \right\} = \exp \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} -1 \right\} = e^{-1} \end{aligned}$$

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x}}$$

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x}} = (\sqrt{1} + 1)^{\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 1}} = 2^{\frac{\pi}{(\frac{\pi}{4})}} = 2^4 = 16$$

Задача Кузнецов Пределы 20-22

Условие задачи

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \ln(1+x) \sqrt{2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{2 + e^x}$$

Решение

Так как $\sqrt{2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ - ограничена, а $\ln(1+x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow 0$, то

$$\ln(1+x) \sqrt{2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow 0$$

Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \ln(1+x) \sqrt{2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{2 + e^x} = \frac{\cos 0 + 0}{2 + e^0} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$