Задача Кузнецов Графики 1-13

Условие задачи

Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

Решение

1) Область определения:

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2) Четность функции:

Функция ни четная ни нечетная.

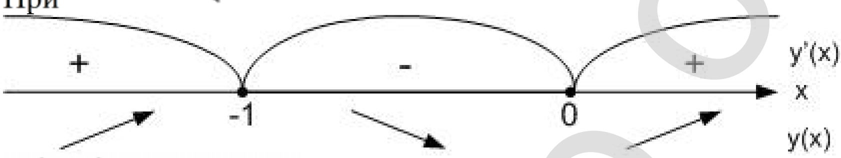
$$y(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x)^2 - 5 = -2x^3 + 3x^2 - 5 \neq \pm y(x).$$

3) Интервалы возрастания и убывания:

$$y' = 6x^2 + 6x.$$

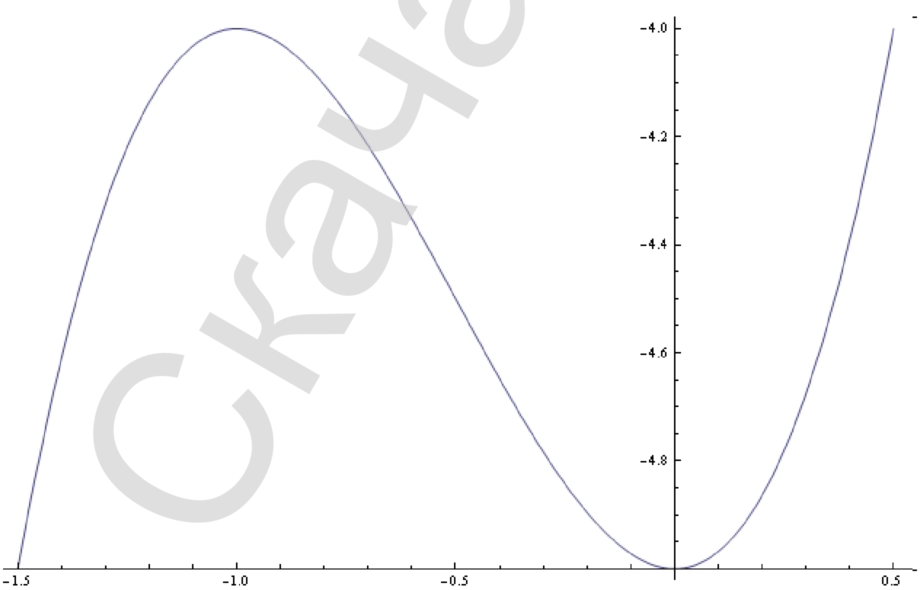
$$y' = 0, \begin{cases} x = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

При



$$y(-1) = -4;$$
$$y(0) = -5.$$
$$(-1; -4) - max;$$
$$(0; -5) - min.$$

4)График функции:



Задача Кузнецов Графики 2-13

Условие задачи

Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$$y = \sqrt[3]{x(x+2)}$$

Решение

1) Область определения:

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2) Четность функции:

Функция ни четная ни нечетная.

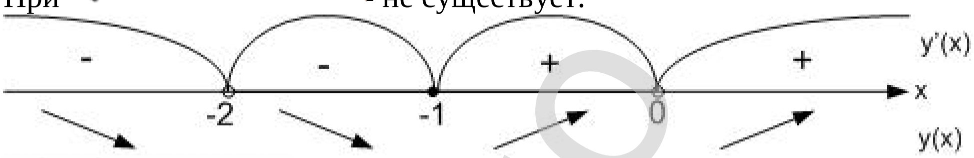
$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x)(-x+2)} = \sqrt[3]{x(x-2)} \neq \pm y(x).$$

3) Интервалы возрастания и убывания:

$$y' = ((x^2+2x)^{\frac{1}{3}})' = \frac{(x^2+2x)'}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} = \frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}.$$

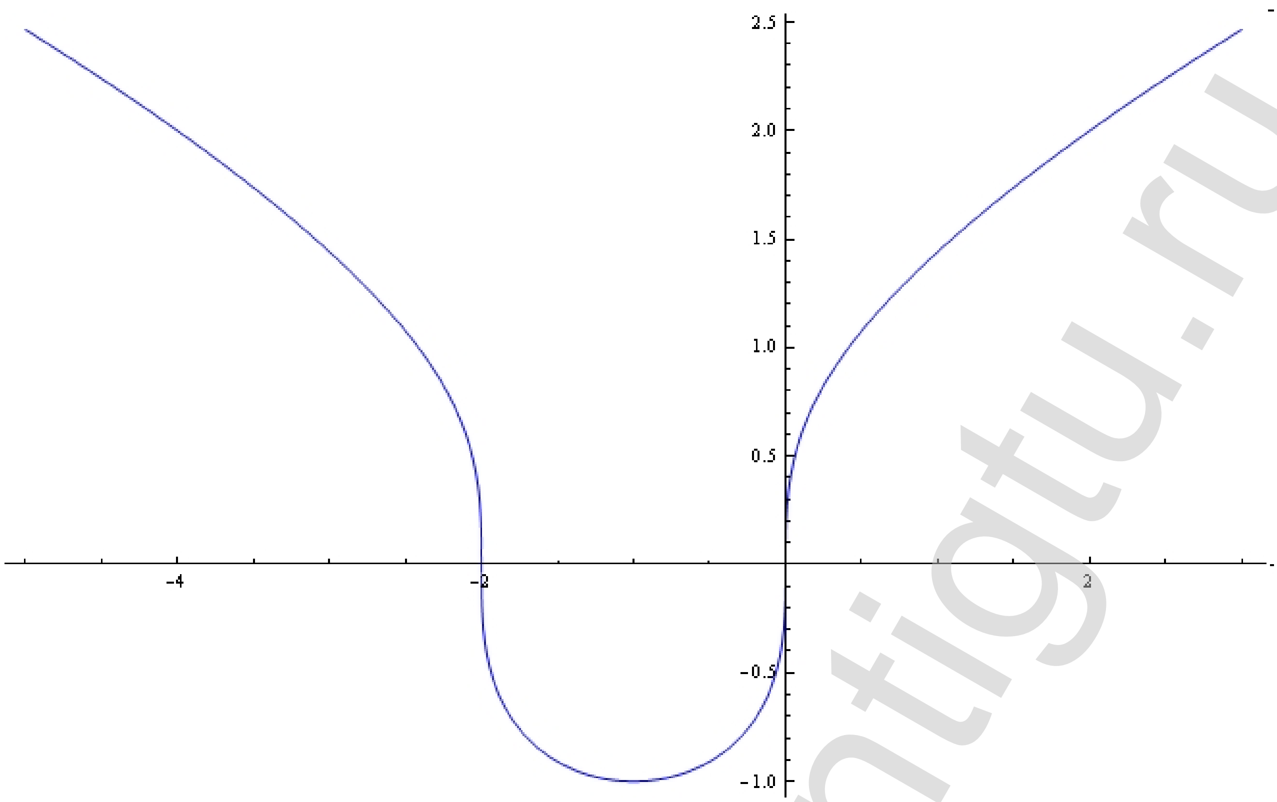
При $y' = 0 : x = -1.$

При $\begin{cases} x = 0, \\ x = -2; \end{cases} \quad - y'$ - не существует.



$$y(-2) = 0;$$
$$y(-1) = -1;$$
$$y(0) = 0.$$
$$(-1; -1) - min.$$

4)График функции:



Задача Кузнецов Графики 3-13

Условие задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$y=\frac{2\left(-x^{2}+7x-7\right)}{x^{2}-2x+2},\ [1;\ 4]$$

Решение

1) Ищем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{2\left(-x^{2}+7x-7\right)}{x^{2}-2x+2}\right)'=$$
$$=2\cdot\frac{(-2x+7)\cdot\left(x^{2}-2x+2\right)-\left(-x^{2}+7x-7\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^{2}-2x+2\right)^{2}}=$$
$$=2\cdot\frac{-2x^{3}+4x^{2}-4x+7x^{2}-14x+14+2x^{3}-14x^{2}+14x-2x^{2}+14x-14}{\left(x^{2}-2x+2\right)^{2}}=$$
$$=2\cdot\frac{-5x^{2}+10x}{\left(x^{2}-2x+2\right)^{2}}=\frac{-10x(x-2)}{\left(x^{2}-2x+2\right)^{2}}$$

2) Находим критические точки функции:

$$y'=0\Longrightarrow\begin{cases}x=0,\\x=2\end{cases}$$

Вычислим значения функции в критических точках внутри отрезка $[1;\ 4]$ и значения функции на концах отрезка:

$$y(1)=\frac{2\left(-1^2+7\cdot1-7\right)}{1^2-2\cdot1+2}=\frac{2(-1+7-7)}{1-2+2}=\frac{-2}{1}=-2$$
$$y(2)=\frac{2\left(-2^2+7\cdot2-7\right)}{2^2-2\cdot2+2}=\frac{2(-4+14-7)}{4-4+2}=\frac{6}{2}=3$$
$$y(4)=\frac{2\left(-4^2+7\cdot4-7\right)}{4^2-2\cdot4+2}=\frac{2(-16+28-7)}{16-8+2}=\frac{10}{10}=1$$
$$f_{max}=y(2)=3$$
$$f_{min}=y(1)=-2$$

Задача Кузнецов Графики 4-13

Условие задачи

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает αt -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

$$k=\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{2}{121}$$

Решение

Составляем функцию:

$$S(t)=\frac{t}{t+\frac{1}{2}}-\frac{2}{121}t=\frac{2t}{2t+1}-\frac{2}{121}t.$$
$$S'(t)=2\cdot\frac{2t+1-2t}{(2t+1)^2}-\frac{2}{121}=\frac{2}{(2t+1)^2}-\frac{2}{121}.$$
$$\frac{2}{(2t+1)^2}-\frac{2}{121}=0\Longrightarrow\begin{cases}t_1=-6,\\t_2=5.\end{cases}$$

$t_1=-6$ - не удовлетворяет условию задачи.
$t_2=5$ - точка минимума.

Ответ: 5 дней.

Задача Кузнецов Графики 5-13

Условие задачи

Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

$$y=2x+x^2-(x+1)\cdot\ln(2+x),\ x_0=-1$$

Решение

$$y' = 2 + 2x - \ln(2+x) - (x+1) \cdot \frac{1}{2+x} = 2 + 2x - \ln(2+x) - \frac{x+1}{2+x}$$

$$y'(-1) = 2 + 2(-1) - \ln(2-1) - \frac{-1+1}{2-1} = 2 - 2 - \ln 1 - 0 = 0$$

$$y'' = 2 - \frac{1}{2+x} - \frac{1 \cdot (2+x) - (x+1) \cdot 1}{(2+x)^2} = 2 - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{(2+x)^2} =$$

$$= 2 - \frac{3+x}{(2+x)^2}$$

$$y''(-1) = 2 - \frac{3-1}{(2-1)^2} = 2 - 2 = 0$$

$$y''' = -\frac{1 \cdot (2+x)^2 - (3+x) \cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = -\frac{2+x-2(3+x)}{(2+x)^3} =$$

$$= -\frac{-4-x}{(2+x)^3} = \frac{4+x}{(2+x)^3}$$

$$y'''(-1) = \frac{4-1}{(2-1)^3} = 3$$

Так как не равна нулю производная нечетного порядка, то в точке $x_0 = -1$ заданная функция экстремума не имеет.

Задача Кузнецов Графики 6-13 (не вся)

Условие задачи

Найти асимптоты и построить графики функций.

$$y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$$

Решение

$$y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}$$

1) Область определения

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

2) Четность функции

Функция общего вида:

$$y(-x) = \frac{3 \cdot (-x)^2 - 7}{2 \cdot (-x) + 1} = \frac{3x^2 - 7}{-2x + 1} \neq \pm y(x)$$

3) Точки пересечения с осями координат

$$ox: \frac{3x^2-7}{2x+1}=0 \Rightarrow$$
$$3x^2-7=0$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$oy: y(0)=\frac{3\cdot 0^2-7}{2\cdot 0+1}=\frac{-7}{1}=-7$$

Решение не закончено…

Задача Кузнецов Графики 7-13

Условие задачи

Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$$

Решение

$1)$*область определения*

$$D(y)=R$$

$2)$*четность, нечетность, периодичность*

$$y(x)=y(-x) \Rightarrow \text{функция четна, ни нечетна, не периодична}$$

$3)$*интервалы знакопостоянства*

$$y=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$
$$y \text{ не существует} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$
$$y(x)>0 \text{ при } x\in(-2;2)$$
$$y(x)<0 \text{ при } x\in(-\infty;-2)\bigcup(2;\infty)$$
$$A_1(-2;0);\ A_2(2;0)$$

$4)$*интервалы возростания, убывания*

$$y'=3\cdot\frac{-2x(x^2+12)-(4-x^2)\cdot 2x}{(x^2+12)^2}=3\cdot\frac{-2x^3-24x-8x+2x^3}{(x^2+12)^2}=\frac{-96x}{(x^2+12)^2}$$
$$y'=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$y' \text{ не существует} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$
$$y'(x)>0 \text{ при } x\in(-\infty;0) \Rightarrow y(x) \text{ возростает при } x\in(-\infty;0)$$
$$y'(x)<0 \text{ при } x\in(0;\infty) \Rightarrow y(x) \text{ убывает при } x\in(0;\infty)$$

с учетом того, что y' *меняет знак с* "+" *на* "−" *при переходе через* $x=0$, *то*

$B(0;y(0))$ – *точка максимума*

5)*интервалы выпуклости, вогнутости*

$$y'' = -96 \cdot \frac{(x^2+12)^2 - x \cdot 2(x^2+12) \cdot 2x}{(x^2+12)^4} = -96 \cdot \frac{12-3x^2}{(x^2+12)^3}$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

y'' *не существует* $\Leftrightarrow x \in \varnothing$

$y''(x) > 0$ *при* $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \Rightarrow y(x)$ *вогнута при* $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

$y''(x) < 0$ *при* $x \in (-2; 2) \Rightarrow y(x)$ *выпукла при* $x \in (-2; 2)$

$C_1(-2; y(-2)); C_2(2; y(2))$ – *точки перегиба*

6)*асимптоты*

а)вертикальные

вертикальных асимптот нет

б)наклонные

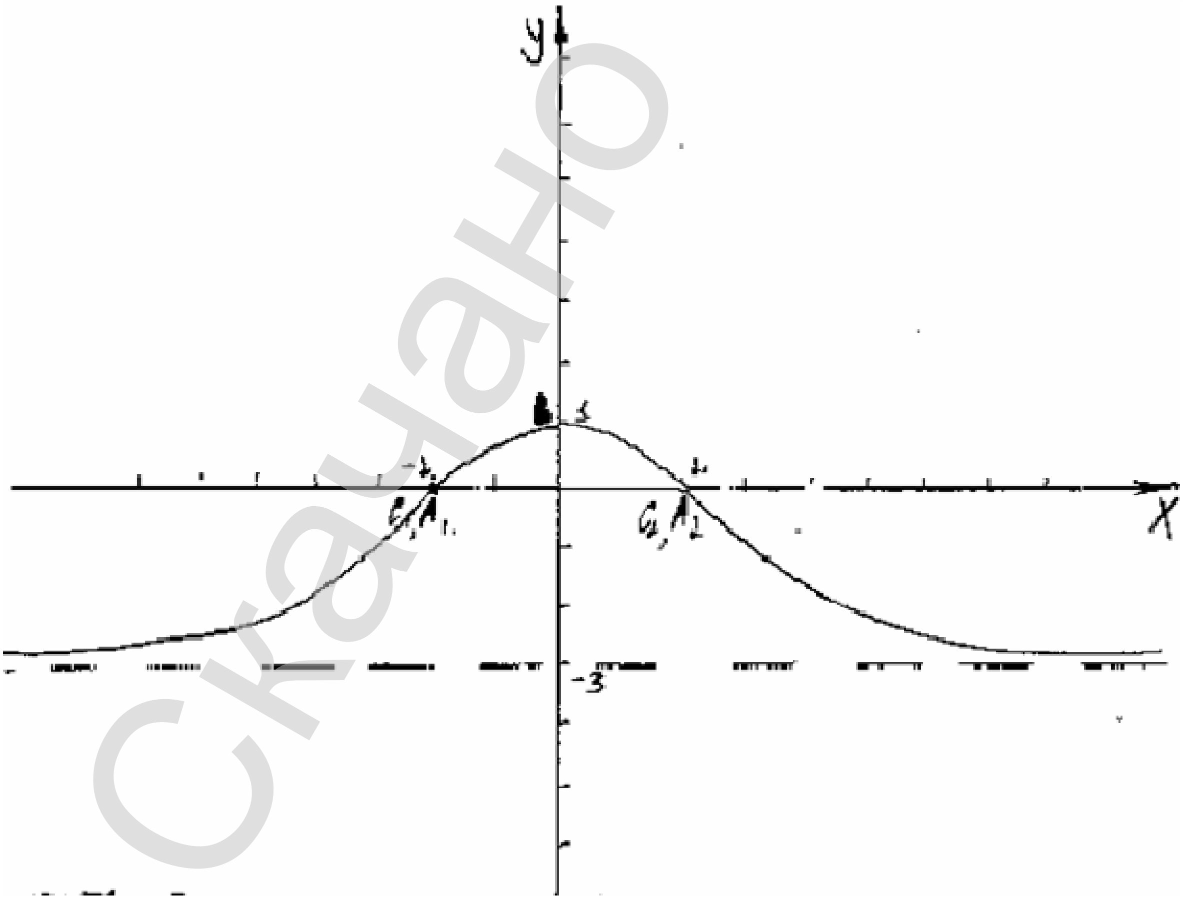
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{12-3x^2}{x\left(x^2+12\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{12/x^2-3}{x\left(1+12/x^2\right)} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{12-3x^2}{x^2+12} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{12/x^2-3}{1+12/x^2} = -3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -3$ – *правая и левая асимптота*

7)*область значений*

$E(y) = (-3; 1]$



Задача Кузнецов Графики 9-13

Условие задачи

Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$$

Решение

1) Область определения:

$$D(y)=(-\infty;+\infty).$$

2) Четность функции:

Функция ни четная ни нечетная.

$$y(-x)=\sqrt[3]{(-x+3)(-x)^2}=-\sqrt[3]{(x-3)x^2}\neq\pm y(x).$$

3) Пересечение с осями:

$$ox:\quad \sqrt[3]{(x+3)x^2}=0;\Longrightarrow\begin{cases}x=-3,\\x=0.\end{cases}$$

$$oy:\quad y(0)=\sqrt[3]{(0+3)0^2}=0.$$

4) Точки разрыва:

Точек разрыва нет, т.к. $D(y)=(-\infty;+\infty).$

5) Асимптоты:

а) Вертикальные:
Вертикальных асимптот нет.
б) Наклонные:

$$y=kx+b.$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}\right)=\{1+0\}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{(x+3)x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4}+x\sqrt[3]{(x+3)x^2}+x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}+1\right)}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{1+\frac{9}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1}\right) = \left\{\frac{3}{\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{1+0}+1}\right\} = \left\{\frac{3}{3}\right\} = 1.$$

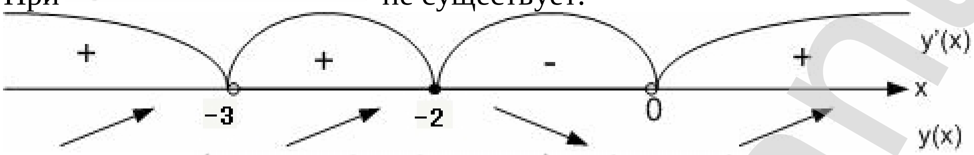
$y = x + 1$ - наклонная асимптота.

6) Точки максимума и минимума функции и интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности):

$$y' = \left((x^3+3x^2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^3+3x^2)' = \frac{1}{3}\cdot(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2+6x) =$$
$$= \frac{3x^2+6x}{3\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}}.$$

При $y' = 0 : x = -2.$

При $\begin{cases} x=-3, \\ x=0; \end{cases} \quad - y'$ - не существует.



На интервале $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(0;+\infty)$ - функция возрастает $(y'>0)$;

На интервале $(-2;0)$ - функция убывает $(y'<0)$.

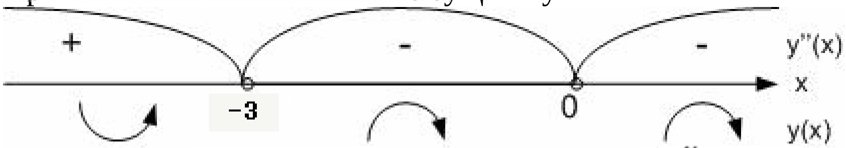
$y(-3) = 0;$
$y(-2) = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59;$
$y(0) = 0.$
$(-2;\sqrt[3]{4}) - max;$
$(0;0) - min.$

7) Точки перегиба функции и интервалы выпуклости и вогнутости:

$$y'' = \left(\frac{1}{3}\cdot(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2+6x)\right)' =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}(x^3+3x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2+6x)(3x^2+6x) + (x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}(6x+6)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{(3x^2+6x)^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^5}} + \frac{6x+6}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}\right) =$$
$$= \frac{-2(3x^2+6x)^2+3(6x+6)(x^3+3x^2)}{9\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^5}} =$$
$$= \frac{18x^2(x+1)(x+3)-18x^2(x+2)^2}{9(x^3+3x^2)\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}} =$$
$$= \frac{18x^2((x^2+x+3x+3)-(x^2+2x+2x+4))}{9x^2(x+3x)\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}} =$$

$$= -\frac{2}{(x+3)\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}.$$

При $\begin{cases} x = -3, \\ x = 0; \end{cases}$ $-\ y''$ - не существует.



На интервале $(-\infty; -3)$ - функция вогнутая $(y'' > 0)$;

На интервале $(-3; 0) \cup (0; +\infty)$ - функция выпуклая $(y'' < 0)$.

$x = -3$ - точка перегиба.

8)График функции: