

Задача Кузнецов Графики 1-15

Условие задачи

Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$$y = (2x + 1)^2 \cdot (2x - 1)^2$$

Решение

1) Область определения:

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2) Четность функции:

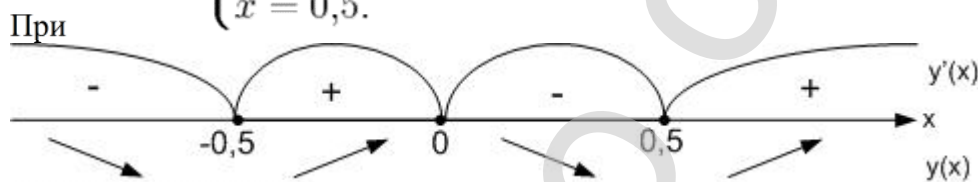
Функция четная.

$$y(-x) = (2(-x) + 1)^2 \cdot (2(-x) - 1)^2 = (2x - 1)^2 \cdot (2x + 1)^2 = y(x).$$

3) Интервалы возрастания и убывания:

$$y' = ((4x^2 - 1)^2)' = 2(4x^2 - 1) \cdot 8x = 16x(4x^2 - 1).$$

$$y' = 0, \begin{cases} x = -0,5, \\ x = 0, \\ x = 0,5. \end{cases}$$



$$y(-0,5) = 0;$$

$$y(0) = 1;$$

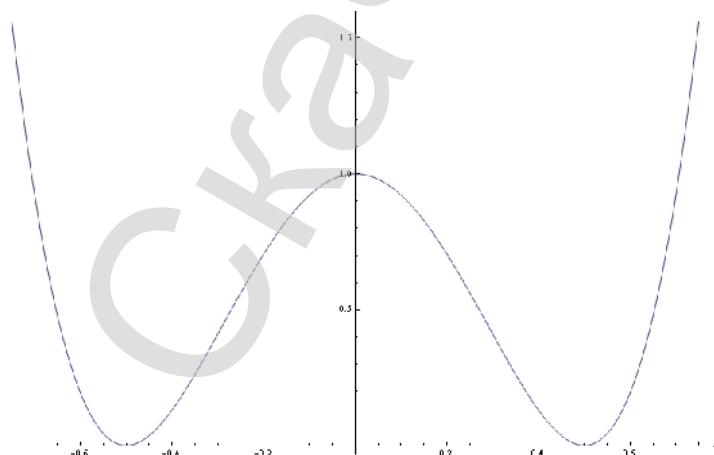
$$y(0,5) = 0.$$

$$(-0,5; 0) - min;$$

$$(0; 1) - max;$$

$$(0,5; 0) - min.$$

4) График функции:



Задача Кузнецов Графики 3-15

Условие задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.

$$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2 \cdot (5-x)}, [1; 5]$$

Решение

1) Ищем производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[3]{2(x-2)^2 \cdot (5-x)} \right)' = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4(x-2)^4 \cdot (5-x)^2}} \cdot 2(2(x-2) \cdot (5-x) - (x-2)^2) = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4(x-2)^4 \cdot (5-x)^2}} \cdot 2(x-2)(10-2x-x+2) = \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{4(x-2) \cdot (5-x)^2 \cdot (x-2)}} \cdot 2(x-2)(12-3x) = \\ &= \frac{2(4-x)}{\sqrt[3]{4(x-2) \cdot (5-x)^2}} \end{aligned}$$

2) Находим критические точки функции:

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Rightarrow x = 4 \\ y' \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Вычислим значения функции в критических точках внутри отрезка $[1; 5]$ и значения функции на концах отрезка:

$$y(1) = \sqrt[3]{2(1-2)^2 \cdot (5-1)} = \sqrt[3]{2 \cdot 1 \cdot 4} = 2$$

$$y(2) = \sqrt[3]{2(2-2)^2 \cdot (5-2)} = 0$$

$$y(4) = \sqrt[3]{2(4-2)^2 \cdot (5-4)} = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 1} = 2$$

$$y(5) = \sqrt[3]{2(4-5)^2 \cdot (5-5)} = 0$$

$$f_{\max} = y(1) = y(4) = 2$$

$$f_{\min} = y(2) = y(5) = 0$$

Задача Кузнецов Графики 4-15

Условие задачи

При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+k}$ -ю часть курса, а забывает αt -ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

$$k = 1, \alpha = \frac{1}{25}$$

Решение

Составляем функцию:

$$S(t) = \frac{t}{t+1} - \frac{1}{25}t.$$

$$S'(t) = \frac{t+1-t}{(t+1)^2} - \frac{1}{25} = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{25}.$$

$$\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{25} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -6, \\ t_2 = 4. \end{cases}$$

$t_1 = -6$ - не удовлетворяет условию задачи.

$t_2 = 4$ - точка минимума.

Ответ: 4 дня.

Задача Кузнецов Графики 5-15

Условие задачи

Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

$$y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2), \quad x_0 = -2$$

Решение

$$y' = 2x + 4 - 2 \cos(x+2) \cdot \sin(x+2) = 2x + 4 - \sin(2x+4)$$

$$y'(-2) = 2(-2) + 4 - \sin(2(-2) + 4) = -4 + 4 - 0 = 0$$

$$y'' = 2 - 2 \cos(2x+4)$$

$$y''(-2) = 2 - 2 \cos(2(-2) + 4) = 2 - 2 = 0$$

$$y''' = 4 \sin(2x+4)$$

$$y'''(-2) = 4 \sin(2(-2) + 4) = 0$$

$$y^{(IV)} = 8 \cos(2x+4)$$

$$y^{(IV)}(-2) = 8 \cos(2(-2) + 4) = 8$$

Так как не равна нулю производная четного порядка, то в точке $x_0 = -2$ заданная функция имеет экстремум. А поскольку $y^{(IV)}(-2) = 8 > 0$, то $x_0 = -2$ - точка локального минимума.

Задача Кузнецов Графики 6-15 (не вся)

Условие задачи

Найти асимптоты и построить графики функций.

$$y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$$

Решение

$$y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}$$

1) Область определения

$$2 - 3x^2 \neq 0$$

$$x^2 \neq \frac{2}{3}$$

$$D(y) = \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$$

2) Четность функции

Функция общего вида:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) - 2}{2 - 3 \cdot (-x)^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{2 - 3x^2} \neq \pm y(x)$$

3) Точки пересечения с осями координат

$$ox: \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -2 - \sqrt{2}, x = -2 + \sqrt{2} \text{ или } x = 1$$

$$oy: y(0) = \frac{0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2}{2 - 3 \cdot 0^2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Решение не закончено...

Задача Кузнецов Графики 7-15

Условие задачи

Провести полное исследование функций и построить их графики.

$$y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$$

Решение

1) Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Ф-ция является чётной, т.к.

$$y(-x) = -\frac{8(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{8x}{x^2+4} = y(x)$$

3) Ф-ция не является периодической

4) Интервалы возрастания и убывания

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{8(x^2+4) - 8x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = -\frac{8x^2+32-16x^2}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{8(x^2-4)}{(x^2+4)^2} = \frac{8(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ при } x = \pm 2$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗
		max		min	

5) Выпуклость и вогнутость кривой

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{8[2x(x^2+4)^2 - (x^2-4) \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x]}{(x^2+4)^4} = \\ &= \frac{16x(x^2+4 - 2(x^2-4))}{(x^2+4)^3} = \frac{16x(-x^2+12)}{(x^2+4)^3} = \\ &= \frac{-16x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3} \end{aligned}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pm 2\sqrt{3}$$

$x \in (-\infty; -2\sqrt{3})$: $y'' > 0$ - кривая вогнута

$x \in (-2\sqrt{3}; 0)$: $y'' < 0$ - кривая выпукла

$x \in (0; 2\sqrt{3})$: $y'' > 0$ - кривая вогнута

$x \in (2\sqrt{3}; +\infty)$: $y'' < 0$ - кривая выпукла

$(0; 0)$, $(-2\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ - точки перегиба

6) Асимптоты:

а) вертикальные: отсутствуют

б) наклонные: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x}{x^2+4} = 0$$

$y = 0$ - наклонная асимптота

4) график.

